La retta nel piano cartesiano Oxy

Il grafico di una *funzione lineare* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = f(x) = m \cdot x + q$ è rappresentato da una retta.

Si dice anche che $y = m \cdot x + q$ è l'equazione della retta in forma *esplicita*.

I coefficienti m e q che compaiono in tale equazione hanno un significato geometrico preciso.

In particolare m, detto *coefficiente angolare*, dipende dalla pendenza della retta rispetto all'asse delle ascisse (si può far vedere che il valore m dipende da una funzione goniometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse x).

OSS. 1: se m>0 la retta è crescente (y cresce al crescere di x) mentre se m<0 la retta è decrescente.

OSS. 2: quanto più |m| è grande tanto più la retta è ripida.

OSS. 3: (caso particolare) se m=0 la retta è parallela all'asse x (f. *costante*)

OSS. 4: le rette parallele all'asse y (NON sono il grafico di una funzione!) hanno equazione x=cost.

Il termina costante q rappresenta l'*intersezione* della retta con l'asse y. Infatti il punto (0;q) appartiene alla retta $y = m \cdot x + q$.

Si può osservare che la retta sul piano ha *2 gradi di libertà*: può ruotare rispetto ad uno qualsiasi dei suoi punti e può traslare parallelamente a se stessa. Ogni movimento rigido della retta sul piano si può ricondurre alla combinazione di tali isometrie. La presenza delle costanti m e q nell'equazione della retta (che possono assumere infiniti valori l'una indipendentemente dall'altra) è coerente con i 2 gradi di libertà.

Se immagino di fissare la pendenza e prendo $m=m_0$, potendo variare liberamente q, ottengo una "famiglia" di rette parallele. Questo insieme di rette prende il nome di *fascio di rette proprio* di coefficiente angolare m_0 e si indica con:

$$y = m_0 x + k \qquad \forall k \in \mathbb{R} .$$

Viceversa se fisso un punto della retta $(x_0; y_0)$ e rispetto ad esso la retta è libera di ruotare ottengo il *fascio di rette improprio* di centro $(x_0; y_0)$. Esso si indica con:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{R} .$$

In entrambi i casi, imponendo il passaggio per un punto, dalle infinite rette del fascio si estrae una ed una sola retta.

OSS.: il passaggio di una retta per un punto $(x_P; y_P)$ si verifica se e solo se le coordinate del punto rendono vera $y = m \cdot x + q$, cioè se $y_P = m \cdot x_P + q$ è un'*identità*.

Problemi diretti relativi al fascio di rette

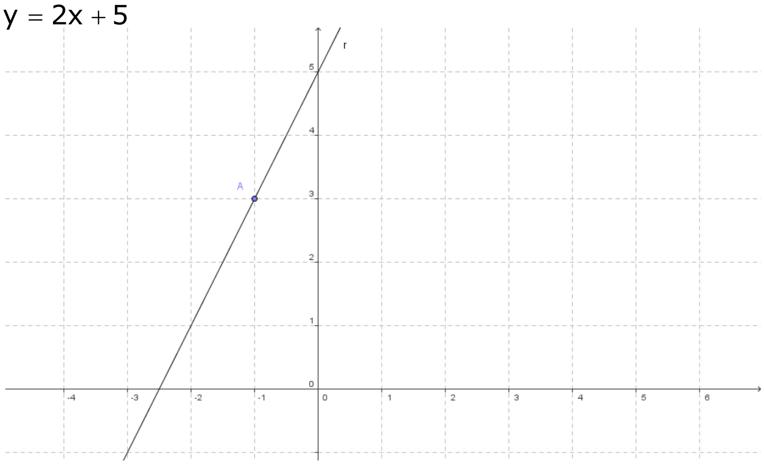
Es. 1

Dato il fascio di rette proprio $y = 2x + k$ trovare la retta del fascio passante per $A(-1;3)$

Sostituisco nell'equazione del fascio le coordinate del punto A e risolvo l'equazione ottenuta rispetto al parametro k:

$3 = 2 \cdot (-1) + k \;\Rightarrow\; k = 5$

Pertanto la retta cercata è: $y = 2x + 5$



Es. 2

Dato il fascio di rette improprio di centro $B(2;1)$ trovare la retta del fascio passante per $A(-1;3)$

L'equazione del fascio assegnato è: $y - 1 = k(x - 2)$

Sostituisco nell'equazione del fascio le coordinate del punto A e risolvo l'equazione ottenuta rispetto al parametro k:

$3 - 1 = k(-1 - 2) \;\Rightarrow\; -3k = 2 \;\Rightarrow\; k = -\dfrac{2}{3}$

Pertanto la retta cercata è: $y - 1 = -\dfrac{2}{3}(x - 2)$

cioè: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$